

## Alexandre Grothendieck, magicien des foncteurs

Luc Illusie

Au début des années cinquante, Grothendieck s'était illustré par de remarquables travaux d'analyse fonctionnelle, qui sont d'ailleurs toujours d'actualité, mais ce sont les contributions révolutionnaires qu'il a apportées à la géométrie algébrique, entre 1957 et 1970, qui l'ont rendu célèbre.

### Les schémas : un pont entre arithmétique et géométrie

La géométrie algébrique est l'étude des objets définis par des équations polynomiales. On peut les étudier de divers points de vue : arithmétique (par exemple, en cherchant les solutions à valeurs entières lorsque les coefficients sont entiers : un problème diophantien, comme le problème de Fermat), topologique et analytique, en examinant les variétés formées par les solutions à valeurs complexes. Avec la théorie des *schémas*, développée dans un traité d'environ 1800 pages, ("les ÉGA")<sup>1</sup>, Grothendieck a donné un cadre général englobant les deux points de vue, jetant ainsi un pont - longtemps rêvé - entre arithmétique et géométrie. Une notion clé dans la construction est celle de *foncteur*. La définition formelle d'un foncteur ne prend que quelques lignes, et semble dépourvue de contenu géométrique. Entre les mains de Grothendieck, elle devient un instrument de construction et d'étude en géométrie algébrique, d'une souplesse, d'une précision et d'une puissance inégalées, comme il le montrera dans une extraordinaire série d'exposés au Séminaire Bourbaki, de 1957 à 1962, intitulée *Fondements de la géométrie algébrique*.

### Nouveaux espaces, nouvelles théories de cohomologie

Quand il entreprend la rédaction des ÉGA, Grothendieck a dans le colimateur les conjectures formulées par André Weil en 1949 concernant les variétés algébriques sur les corps finis. Le traité terminé, il pourra s'y attaquer. Le traité restera inachevé, mais entre temps, Grothendieck imaginera de nouveaux espaces (les *sites* et les *topos*), construits à partir de nouveaux procédés de localisation, qu'on appelle aujourd'hui *topologies de Grothendieck*. La plus célèbre d'entre elles, la *topologie étale*, beaucoup plus fine que la topologie de Zariski utilisée jusque là, est proche de la topologie classique dans le cas des variétés algébriques complexes. À l'aide de la topologie étale, Grothendieck et ses collaborateurs (Artin, Verdier) construiront une théorie de cohomologie, la *cohomologie étale*, avec des variantes dites  *$\ell$ -adiques* (une pour chaque nombre premier  $\ell$ ), grâce auxquelles Grothendieck démontrera les trois premières des conjectures de Weil, et ouvrira la voie à

---

1. *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, Pub. Math. IHÉS 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32

la démonstration de la dernière, la plus difficile, *l'hypothèse de Riemann sur les corps finis*, qui sera réalisée par Pierre Deligne en 1973.

### Dévissages

Grothendieck avait une manière très personnelle de concevoir la formulation et la démonstration des énoncés mathématiques. Pour lui, un énoncé *absolu*, portant, disons, sur une variété donnée (finitude de groupes de cohomologie, par exemple), n'était pas un bon énoncé. Il voulait un énoncé plus général, en apparence beaucoup plus difficile, un énoncé *relatif*, avec paramètres, portant sur des familles de variétés, la nature de l'espace de paramètres important peu. En réalité, cet énoncé plus général, précisément à cause de sa généralité, se prêtait à des réductions élémentaires qui conduisaient, sans effort, et comme par miracle, à la solution. Grothendieck appelait cette méthode *dévissage*. Il en avait donné un exemple spectaculaire dès 1957, avec la démonstration de la formule dite de *Grothendieck-Riemann-Roch*. La méthode a inspiré depuis des générations de géomètres.

### Galois et Poincaré

Dès 1960, Grothendieck observe que groupes de Galois et groupes fondamentaux (de Poincaré) de variétés ont une définition commune, comme groupe d'automorphismes d'un certain *foncteur fibre*. La théorie du groupe fondamental qu'il en déduira dans le cadre de la théorie des schémas est à la source des théorèmes fondamentaux sur la cohomologie étale. Une vaste généralisation, le *formalisme tannakien*, que Grothendieck proposera plus tard, joue un rôle important en théorie des représentations.

### Les six opérations

Catégories et foncteurs avaient été introduits dans les années cinquante pour les besoins d'une théorie naissante, *l'algèbre homologique*, à la suite d'un livre célèbre de Cartan et Eilenberg<sup>2</sup>. Grothendieck construira de toutes nouvelles fondations pour cette théorie, la théorie des *catégories et foncteurs dérivés*, qui lui permettra de démontrer de très généraux théorèmes de dualité dans divers contextes. Le formalisme dit des *six opérations* qui y apparaît, et la théorie des *catégories triangulées* développée conjointement par Verdier, sont aujourd'hui d'un usage courant, non seulement en géométrie algébrique, mais dans plusieurs autres domaines, comme la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.

### Motifs

Pour tenter de relier entre elles les diverses cohomologies  $\ell$ -adiques, Grothendieck conçoit une cohomologie universelle, qu'il baptise *théorie des motifs*, fabriquée à partir des variétés algébriques et des correspondances entre

---

2. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956

elles, devant avoir des *réalisations* (par des foncteurs appropriés) dans les cohomologies  $\ell$ -adiques, et dans d'autres, plus classiques, telles que les cohomologies dites de Betti ou de de Rham. La construction repose sur des conjectures, que Grothendieck appelle *conjectures standard*. À part la première (dite de *Lefschetz difficile*, prouvée par Deligne en 1974), elles sont toujours ouvertes. Cette théorie conjecturale a inspiré de nombreux travaux, aboutissant parfois à la démonstration d'autres conjectures difficiles, tels que ceux de Voevodsky<sup>3</sup>.

### L'âge d'or des années soixante

Grothendieck a été professeur à l'IHÉS de 1959 à 1970. Autour de lui, dans les séminaires qu'il y animait, les fameux SGA<sup>4</sup>, s'était constituée une équipe d'élèves qui défrichait avec enthousiasme les nouveaux territoires que "le Maître" nous faisait découvrir. Des collègues, jeunes et moins jeunes, venus de divers coins du monde, participaient à cette aventure, qui fut une sorte d'âge d'or de la géométrie algébrique.

### Souvenirs

Les séminaires avaient lieu à l'IHÉS, le mardi après-midi, et s'étaient sur une année, parfois deux. Ils se tenaient dans un ancien salon de musique, transformé en bibliothèque et salle de conférences, dont les larges baies vitrées donnaient sur le parc du Bois-Marie. Le Maître nous y emmenait parfois faire un tour de promenade avant l'exposé, pour nous faire part de ses dernières idées. Les séminaires portaient sur ses travaux, mais en relation avec eux, il y avait d'autres résultats dont il confiait l'exposition à des élèves ou collègues. Il avait ainsi demandé à Deligne, dans le séminaire SGA 7, de transposer, dans le cadre de la cohomologie étale, une formule particulièrement ardue de topologie, dite *formule de Picard-Lefschetz*, à la démonstration de laquelle il m'avait avoué n'avoir compris goutte (cette formule devait, par la suite, jouer un rôle clé dans la démonstration, par le même Deligne, de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis). Au tableau, Grothendieck était d'un dynamisme impressionnant, mais toujours clair et méthodique. Pas de boîte noire, pas d'esquisse. Tout était expliqué en détail. Il lui arrivait pourtant, parfois, d'omettre une vérification qu'il estimait être de pure routine (mais qui pouvait s'avérer plus délicate que prévu). Après l'exposé, les auditeurs étaient conviés à prendre le thé au salon du bâtiment administratif. C'était l'occasion de discuter tel ou tel point du séminaire, d'échanger des idées. Grothen-

---

3. médaille Fields 2002 pour sa démonstration d'une conjecture de Bloch-Kato sur les groupes de Milnor

4. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 1, 3, 4, 5, 6, 7, Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, 224, 225, 269, 270, 288, 305, 340, 589, Springer-Verlag, SGA 2, North Holland, 1968

dieck aimait demander à ses élèves de rédiger ses exposés. Ils apprenaient ainsi le métier. Sur le plan de la rédaction, il était d'une exigence redoutable. Mes textes, tapés à la machine, d'une cinquantaine de pages, étaient noircis de ses critiques et suggestions. Je me rappelle les longues après-midi que je passais chez lui à les examiner, une par une. Les résultats devaient être présentés dans leur cadre naturel, ce qui voulait dire d'habitude, le plus général possible. Tout devait être démontré. Les "Il est clair que" ou "On voit facilement que" étaient bannis. On discutait du contenu mathématique point par point, mais aussi de l'ordre des mots dans la phrase, de la ponctuation. La longueur importait peu. Si une digression paraissait intéressante, elle était la bienvenue. Bien souvent, nous ne finissions pas avant huit heures du soir. Il m'invitait alors à dîner simplement, avec sa femme Mireille et ses enfants. Après le repas, à titre de récréation, il me racontait des morceaux de mathématiques auxquels il avait réfléchi dernièrement. Il improvisait sur la feuille blanche, avec son gros stylo, de sa fine et rapide écriture, s'arrêtant parfois sur un symbole, pour y repasser la plume avec délectation. J'entends encore sa voix douce et mélodieuse, ponctuée de temps à autre d'un brusque "Ah!" quand une objection lui venait à l'esprit. Puis il me reconduisait à la gare, où je prenais le dernier train pour Paris.