Fourier, un mathématicien inspiré par la physique

Le nom de Fourier est familier aux mathématiciens comme aux physiciens, mais son œuvre mathématique a été mal appréciée dès l'origine et reste largement méconnue. Cet article insiste sur sa portée et met en évidence, contre les préjugés encore en cours, son caractère rigoureux. On sait mieux aujourd'hui que naguère qu'on peut être bon physicien et bon mathématicien.

Fourier méconnu

Ma collection d'Encyclopédia Universalis date de 1974. Elle contient d'excellents articles dans tous les domaines, en physique et en mathématique en particulier. Mais il n'y a pas d'article sur Joseph Fourier. A un siècle de distance, cette absence fait écho à une phrase lapidaire de Victor Hugo quand, dans *Les Misérables*, il évoque l'année 1817 :

> *« Il y avait à l'Académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié, et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont la postérité se souviendra. »*

Le *« Fourier obscur »* est le phalanstérien[1] Charles Fourier (1772-1837). Le *« Fourier célèbre »* est le baron Joseph Fourier (1769-1830), celui qui nous occupe. Charles Fourier a droit à un article dans Encyclopédia Universalis 1974, et il a sa rue à Paris ; Joseph Fourier n'a ni l'un ni l'autre.

Cela peut surprendre, parce que Fourier est l'un des noms propres les plus courants dans la littérature scientifique, et qu'il s'agit bien de Joseph Fourier. Equation de Fourier, formules de Fourier, séries de Fourier, intégrale de Fourier, transformation de Fourier, Fast Fourier Transform, analyse de Fourier... inutile de dire ici de quoi il s'agit, ces termes expriment des connaissances de base pour les physiciens et les ingénieurs comme pour les mathématiciens. Il n'empêche que, durant la vie de Fourier comme après sa mort, son nom a eu de la peine à se frayer un passage parmi les gloires nationales.

Portrait de Joseph Fourier par Jules Boily, 1823
© Académie des sciences - Institut de France

Aujourd'hui le pas est franchi. Encyclopédia Universalis a son article Joseph Fourier. Aucune rue de Paris, mais l'une des plus grandes universités françaises porte son nom. En 1998 est paru un livre sur Fourier, créateur de la physique mathématique, par Jean Dhombres, mathématicien, et Jean-Bernard Robert, physicien, qui est maintenant l'ouvrage de référence pour qui veut connaître Joseph Fourier [DR]. En 2005, l'Académie des sciences a inclus Fourier parmi les physiciens à célébrer dans le cadre de l'Année internationale de la physique, et j'ai parlé à cette occasion du *« retour de Fourier »*.

Voici une première explication, sommaire mais correcte, de ce retournement de point de vue sur Fourier. En 1974, Fourier était trop mathématicien pour être considéré parmi les physiciens, et trop physicien pour être considéré parmi les mathématiciens. Aujourd'hui, le rapprochement des mathématiques et de la physique valorise au contraire Fourier comme emblème de ce rapprochement.

Pour Fourier,

> *« l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »*

Cette idée est exprimée et développée dans le Discours préliminaire à la Théorie analytique de la chaleur, son œuvre maîtresse. Elle amena Fourier à des découvertes et des créations en mathématiques qui furent difficilement

1. Le phalanstère est l'unité sociale dans le socialisme utopique de Charles Fourier. Le Phalanstère est son organe, fondé par Fourier.

Article proposé par :
Jean-Pierre Kahane, jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr
Laboratoire de mathématiques d'Orsay, CNRS/Univ. Paris-Sud, Orsay

acceptées à son époque, et ne peuvent être pleinement appréciées qu'aujourd'hui. J'en donnerai quelques exemples, et ce sera le sujet principal de cet article. Auparavant, il sera bon de situer l'homme et l'œuvre.

Sa vie

La vie de Joseph Fourier est fascinante. Il est né à Auxerre le 21 mars 1768, sous le règne de Louis XV, et mort le 16 mai 1830, juste avant la chute de son petit-fils Charles X. Il a vécu la fin de l'Ancien régime, la Révolution, l'Empire et la restauration des Bourbon. Sa jeunesse fut studieuse. Pauvre, orphelin, brillant sujet, il fut admis comme élève à l'Ecole militaire d'Auxerre, tenue par des moines bénédictins, puis recruté comme professeur à l'âge de 16 ans 1/2. Il découvrit les mathématiques chez Bezout[2] et Clairaut[3], s'intéressa à la localisation des racines d'une équation algébrique et communiqua à Legendre ses premiers résultats. Legendre soutint sa demande d'entrer dans l'Artillerie, le corps militaire le plus savant, comme élève officier et, si l'on en croit Arago, le ministre de la guerre répondit en ces termes : « *Fourier n'étant pas noble ne pourrait entrer dans l'artillerie, quand même il serait un second Newton* ». Fourier se tourna vers l'autre carrière à laquelle il était préparé, l'Eglise. On l'appelait déjà l'abbé Fourier quand, le 2 novembre 1789, l'Assemblée nationale décida la suspension des vœux. Fourier en profita pour retourner à l'enseignement des humanités et à la recherche mathématique, et prendre part à la vie publique en 1793 et 1794, les années qui voient l'exécution de Louis XVI et la chute de Robespierre en passant par la guerre, la levée en masse et les comités révolutionnaires. Actif et efficace, le sans-culotte Fourier fut arrêté et libéré plusieurs fois avant de revenir à Auxerre dans la fonction nouvellement créée d'« *instituteur salarié par la nation* ».

En octobre 1794 fut créée par la Convention nationale l'éphémère Ecole normale de l'an III. Elle était censée accueillir 1 500 élèves pour y recevoir l'enseignement des plus grands savants de l'époque, dont Lagrange, Monge, Laplace, Haüy et Berthollet. Fourier en fut le plus brillant élève, et devint entre 1795 et 1798 professeur à l'Ecole polytechnique, nouvellement créée. Ses cours portaient sur différents sujets de mathématiques, équations algébriques, mécanique, et probabilités. Monge enseignait la géométrie et patronnait Fourier. Monge, comme les savants précités, était membre de l'Institut de France, créé par la Convention nationale pour remplacer les Académies, supprimées par la Révolution. La première classe de l'Institut remplaçait l'Académie des sciences, et le général Bonaparte y fut élu, au retour des campagnes d'Italie, dans la section de géométrie, avant de se lancer dans l'expédition d'Egypte. L'expédition d'Egypte fut une entreprise scientifique autant que militaire. Bonaparte signait ses ordres du jour « *le membre de l'Institut, commandant l'armée d'Orient* ». Un Institut fut fondé au Caire, calqué sur l'Institut de France, avec Monge comme président et Fourier comme secrétaire perpétuel. La perpétuité fut courte mais active. Fourier, sans cesser d'être mathématicien, devint égyptologue, et coordonna les recherches et relevés sur les monuments de l'Egypte ancienne. Après le retour en France de Bonaparte et la mort de Kléber, le rapatriement du corps expéditionnaire fut une véritable aventure, dans laquelle se déployèrent les talents de Fourier en matière d'organisation et de diplomatie. Le matériel et les documents rapportés d'Egypte allaient servir de base à une monumentale « *Description de l'Egypte* » dont Fourier fut l'organisateur et le préfacier, et qui l'occupa après 1801 quand il devint préfet de l'Isère.

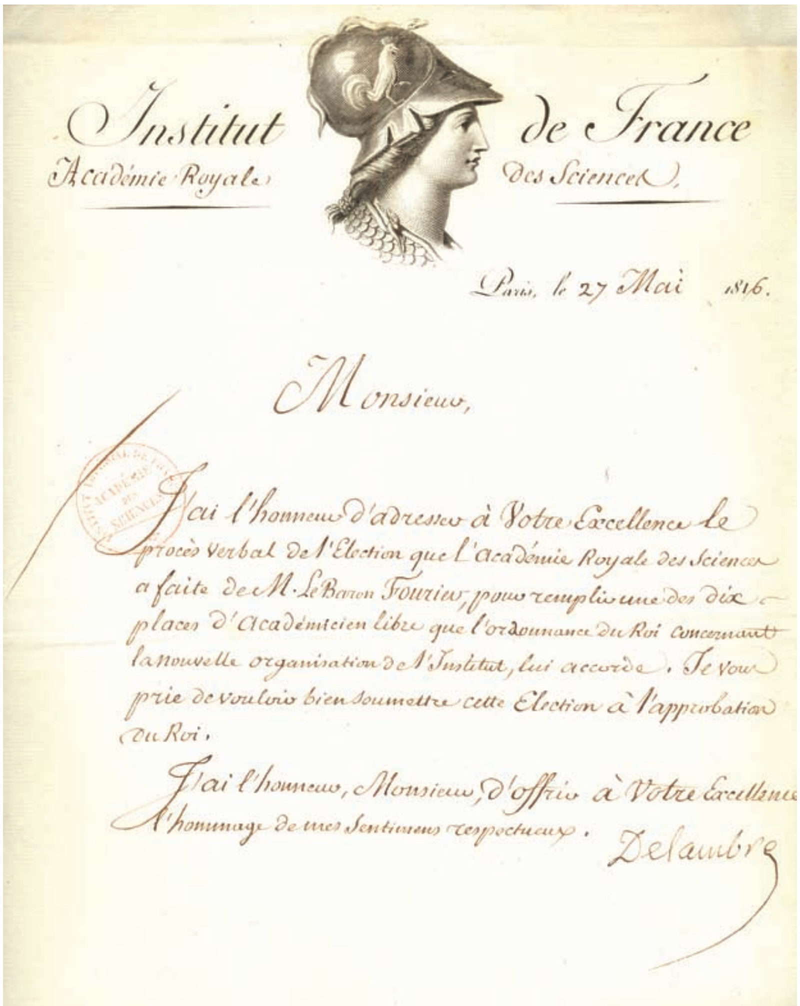
En effet, Bonaparte l'avait apprécié, et il lui confia la charge de préfet dans le département difficile de l'Isère. Entre 1802 et 1814, Fourier séjourna donc à Grenoble, s'occupa des mines, des routes, des marais, de l'éducation, de la bonne société à rallier à l'Empire, en même temps que de la « *Description de l'Egypte* ». Il vécut là dans un isolement scientifique presque total. Mais c'est là qu'il construisit son œuvre maîtresse, la Théorie analytique de la chaleur [F]. Les expériences avaient lieu dans son bureau de préfet, la rédaction dans la montagne quand il faisait trop chaud à Grenoble.

Son œuvre maîtresse

Avant Fourier, la théorie de la chaleur était un sujet assez confus. Lavoisier et Laplace avaient des conceptions différentes sur la nature du « *calorique* ». L'approche de Fourier lui permettait de ne pas prendre parti sur le calorique puisque son explication de la propagation de la chaleur était indépendante de sa nature. Le mémoire qu'il écrit sur le sujet contient les équations, et leur traitement par des procédés nouveaux, en premier lieu par des séries trigonométriques. Le mémoire fut adressé en 1807 à la première classe de l'Institut et examiné par Lagrange, Laplace, Lacroix et Monge. Lagrange, le plus célèbre et respecté des mathématiciens de l'époque, fut hostile : on le sait par les lettres que Fourier lui écrivit, et par un document dont je parlerai ensuite. Le mémoire ne fut pas imprimé. Fourier entreprit une correspondance avec les mathématiciens de Paris, Laplace et Lagrange en particulier. Le sujet fut alors proposé au concours pour 1811. Fourier compléta son texte, mit en exergue une belle citation de Platon (« *et ignem regunt numeri* » ; c'est aussi la chaleur que gouvernent les nombres), adressa son mémoire au dernier moment, et obtint le prix. Le jury, constitué de Lagrange, Laplace et Lacroix, émit cependant de sérieuses réserves :

> « *Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des*

2. Etienne Bezout (1730-1783) est connu par l'identité de Bezout en algèbre. Il était géomètre et mécanicien.
3. Alexis Clairaut (1713-1765), astronome et mathématicien de grand talent (promoteur avant l'heure de la transformée de Fourier discrète), académicien en 1731 (adjoint mécanicien) quoiqu'il n'ait pas l'âge requis.


Institut de France
Académie Royale des Sciences.

Paris, le 27 Mai 1816.

Monsieur,

J'ai l'honneur d'adresser à Votre Excellence le procès verbal de l'Election que l'Académie Royale des Sciences a faite de M. Le Baron Fourier, pour remplir une des dix places d'Académicien libre que l'ordonnance du Roi concernant la nouvelle organisation de l'Institut, lui accorde. Je vous prie de vouloir bien soumettre cette Election à l'approbation du Roi.

J'ai l'honneur, Monsieur, d'offrir à Votre Excellence l'hommage de mes sentiments respectueux.

Delambre

Procès verbal de l'élection de Fourier à l'académie, signé par Delambre, l'un des deux astronomes qui déterminèrent le mètre.

corps, soit à leur surface : et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. »

En bref, bon physicien et piètre mathématicien. Nous allons examiner ce reproche fait à Fourier de n'être pas rigoureux. Il est essentiellement fondé sur son usage des séries trigonométriques, et il est révélateur qu'Arago, dans la belle notice nécrologique qu'il a rédigée pour Fourier, ne dise pas un mot de ce qu'on appelle aujourd'hui les séries de Fourier. De nouveau, le mémoire, quoique couronné, ne fut pas imprimé.

Fourier, préfet de l'Empire, était devenu le baron Fourier. Mais la fin de l'Empire était proche. Napoléon abdiqua, revint pour 100 jours, fut exilé à Sainte-Hélène, et pendant ce temps Fourier fut démis (par Napoléon) de ses fonction de préfet de l'Isère, nommé (par Napoléon) préfet du Rhône, démis de nouveau par Napoléon, et enfin nommé à Paris dans la paisible fonction de directeur du bureau des statistiques. Il se présenta en 1816 à l'Académie des sciences, recréée par Louis XVIII et fut élu, mais le roi désigna Cauchy à sa place. Il se présenta de nouveau en 1817, fut élu de nouveau et cette fois accepté par le roi, comme membre de la section de physique générale ; c'était bien alors le « *Fourier célèbre* » de Victor Hugo. En 1822 il devint secrétaire perpétuel. C'est alors qu'il publia la Théorie analytique de la chaleur, qui ajoute au mémoire couronné un très intéressant discours préliminaire.

L'œuvre mathématique de Fourier ne se borne pas à la Théorie analytique de la chaleur. Outre ses travaux de jeunesse sur les équation algébriques, puis sur les systèmes d'équations (« *analyse déterminée* »), il avait développé une théorie pour la résolution des systèmes d'inéquations (« *analyse indéterminée* ») qui, si elle avait été publiée, aurait fait de Fourier le père de l'analyse convexe. Il développa des idées novatrices sur la chaleur terrestre. Il fut également un propagandiste de la statistique.

Les séries de Fourier

Fourier fut aussi membre de l'Académie française et il eut droit à deux éloges après sa mort en 1830, l'un par Victor Cousin, l'autre par Arago. Les deux exaltent le personnage, sa vie et la variété de ses talents et de ses intérêts. Les deux sont muets sur ce qui rend célèbre aujourd'hui le nom de Fourier : les séries de Fourier, les intégrales de Fourier, l'analyse de Fourier.

Je ne m'étendrai pas sur Fourier physicien. Il faut se référer à ce propos aux études menées à Grenoble par Jean-Bernard Robert, et qui figurent dans le livre de Dhombres et Robert. Il savait mener des expériences et dégager des concepts. Comme il le dit dans le Discours préliminaire

« les différents corps ne possèdent point au même degré la faculté de contenir la chaleur, de la recevoir, ou de la transmettre à travers leur superficie, et de la conduire dans l'intérieur de la masse. Ce sont ces trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement, et qu'elle apprend à mesurer. »

Pour obtenir ses équations (propagation à l'intérieur et propagation à la surface), il introduit l'outil conceptuel du « *flux de chaleur* ». Le souci du physicien, présent dans son souci de conduire la théorie « *jusqu'aux dernières applications numériques* », est pour beaucoup dans son approche mathématique.

Je vais m'étendre à présent sur la naissance des séries de Fourier.

La théorie analytique de la chaleur comporte neuf chapitres. Le premier expose les aspects physiques de la propagation de la chaleur. Le second en donne les équations différentielles, d'abord sur des exemples, puis de façon générale : à l'intérieur d'un corps homogène la température est donnée par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

où K, C et D sont des constantes physiques dépendant du corps. C'est ce que nous appelons aujourd'hui l'équation de la chaleur, qui s'écrit en coordonnées réduites

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

La solution dépend des valeurs initiales et des valeurs au bord du domaine.

C'est dans le troisième chapitre qu'apparaissent les séries trigonométriques. Il s'agit d'abord d'un problème spécial : on considère un corps d'extension infinie, bordé par une bande horizontale et deux demi-plans parallèles, défini par

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y < \infty, -\infty < z < \infty$$

La partie horizontale est portée à la température de l'eau bouillante, et les bords verticaux à la température de la glace fondante. Quand l'équilibre est réalisé, quelle est la température à l'intérieur du corps ?

C'est ce que nous appelons aujourd'hui un problème de Dirichlet : déterminer une fonction harmonique ($\Delta u = 0$) à partir de ses valeurs au bord. Ici une solution explicite est

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} arctg \frac{\sinh y}{\cos x}$$

et Fourier la donne, après un long détour, qui s'avère bien plus intéressant que le résultat. Il observe d'abord que les fonctions

$$e^{-y}\cos x, e^{-3y}\cos 3x, e^{-5y}\cos 5x, \text{etc.}$$

satisfont aux conditions $\Delta u = 0$ et $u(\pm\frac{\pi}{2}, y) = 0$. Il cherche une solution sous la forme

$$u(x,y) = ae^{-y}\cos x + be^{-3y}\cos 3x + ce^{-5y}\cos 5x + \cdots$$

ce qui l'amène à écrire en $y = 0$

$$1 = a\cos x + b\cos 3x + c\cos 5x + \cdots \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

Il calcule les coefficients et obtient

$$1 = \frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots)\ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$
$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}(e^{-y}\cos x - \frac{1}{3}e^{-3y}\cos 3x + \frac{1}{5}e^{-5y}\cos 5x - \cdots)\ (y > 0).$$

La seconde série est *« extrêmement convergente »* et lui donne rapidement $u(x, y)$ à l'approximation voulue. C'est, dans ce cas particulier, l'illustration d'un passage important du Discours préliminaire concernant *« les équations du mouvement de la chaleur »* :

> *« Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait en obtenir les intégrales ; ce qui consiste à passer d'une expression commune à une solution propre assujettie à toutes les conditions données. Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux dont nous ne pourrions ici faire connaître l'objet. La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions ; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles. »*

Effectivement, le développement de $u(x, y)$ en série trigonométrique est un excellent moyen, pour un $y > 0$ fixé, d'accéder aux *« dernières applications numériques »*. Reste à établir la validité du développement paradoxal de la constante 1, considérée sur l'intervalle $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, en série trigonométrique sous la forme écrite. Fourier explicite ce que veut dire la formule, à savoir la convergence des sommes partielles du second membre vers le premier membre, et l'établit rigoureusement, par la méthode qui permettra plus tard à Dirichlet d'obtenir le premier théorème général sur la convergence des séries de Fourier.

Puis, au cours de 50 pages, il abandonne la propagation de la chaleur pour jouer avec le nouvel outil qu'il a introduit. Il multiplie les exemples, établit les formules pour le calcul des coefficients que nous appelons aujourd'hui formules de Fourier, montre à l'occasion que la série trigonométrique qui possède ces coefficients (la série de Fourier) converge vers la fonction, et conclut (au n° 235 ; les numéros représentent les parties successives de l'ouvrage) que toutes les séries obtenues de cette manière convergent, et qu'on peut écrire de manière générale

$$\begin{aligned}\pi f(x) &= \frac{1}{2}\int f(\alpha)d\alpha + \cos x\int f(\alpha)\cos\alpha d\alpha \\ &\qquad + \sin x\int f(\alpha)\sin\alpha d\alpha + \cdots \\ &= \int f(\alpha)d\alpha(\frac{1}{2} + \cos(x-\alpha) + \cos 2(x-\alpha) + \cdots)\end{aligned}$$

Il précise le sens de $\int$ et introduit à cette occasion la notation $\int_a^b$ (n° 234).

A la fin de l'ouvrage, il revient sur ces formules (n° 416 à 419), avec des affirmations contestables :

> « *la fonction f(x) à laquelle cette démonstration s'applique est entièrement arbitraire, et non astreinte à une loi continue* » (n° 417) « *il n'y a ainsi aucune fonction, ou partie de fonction, que l'on ne puisse exprimer en une suite trigonométrique... la suite trigonométrique écrite au second membre est convergente...* » (n° 418)

A la lettre, Fourier a tort. D'abord, pour que les formules de Fourier aient un sens, il faut que la fonction soit intégrable ; elle n'est donc pas entièrement arbitraire. Ensuite, même pour des fonctions continues, la convergence de la série de Fourier ne va pas de soi : la série peut diverger en certains points (du Bois-Raymond 1873), et le fait qu'elle ne peut pas diverger partout n'a été établi qu'en 1966 (Carleson).

Caricature de J. Fourier (1768-1830) et de A.M. Legendre (1752-1833) par L. Boilly (1761-1845). Extrait d'un album de 73 portraits-charge aquarellés.

Portée, programme

Et cependant, dans sa thèse sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique (1854), Riemann considère Fourier comme le premier qui ait saisi la nature de la question : « *Durch Fourier war nun zwar die Natur der trigonometrischen Reihen vollkommen richtig erkannt* »[4]. Il rappelle les formules, que je schématise sous la forme

$$f = \Sigma \quad \text{(pour le développement en série)}$$

$$c_n = \int \quad \text{(l'expression intégrale des coefficients de la série),}$$

l'usage qu'en fait Fourier, et l'opposition de Lagrange sur laquelle, dit-il, un document doit exister aux Archives de l'Académie des sciences.

Avant d'en venir à l'opposition de Lagrange, je désire commenter le couple de formules $f = \Sigma$, $c_n = \int$.

La seconde exige de savoir ce qu'on entend par intégrale. Pour Dirichlet en 1829, c'était l'intégrale selon Cauchy, intégrale des fonctions continues localement, éventuellement étendue aux bornes. Pour Riemann en 1854, ce fut l'occasion de définir son intégrale, qui devint classique. Pour Lebesgue en 1906, ce fut, sous forme améliorée, l'intégrale qu'il avait définie en 1901. Pour Denjoy, ce fut la version complète de sa « *totalisation* », dans les quatre volumes de ses « *leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique* » (1941-1949). Laurent Schwartz publia en 1946 son premier exposé de la théorie des distributions sous le titre « *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques* ». J'aurais pu ajouter l'intégrale de Stieltjes, l'intégrale de Wiener etc. A chaque notion d'intégrale correspond une notion de série de Fourier selon cette intégrale ; c'est une série trigonométrique dont les coefficients sont calculés par la formule intégrale de Fourier. Actuellement, l'usage en mathématiques est d'appeler « *séries de Fourier* » les séries de Fourier-Lebesgue.

La formule $f = \Sigma$ pose immédiatement la question de la convergence de la série. Faute de la convergence en chaque point, on peut avoir la convergence presque-partout au sens de Lebesgue, comme dans le théorème de Carleson de 1966 : les séries de Fourier des fonctions de carré intégrable convergent presque-partout. On peut aussi utiliser des procédés de sommation, comme dans le théorème de Fejér de 1900 : les moyennes arithmétiques des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction continue convergent uniformément vers la fonction. On peut enfin interpréter la formule comme une égalité dans un espace fonctionnel, le cas le plus simple étant celui de l'espace L^2. C'est là l'une des sources de l'analyse fonctionnelle.

La portée de ces formules fut considérable, au cours du 19e et du 20e siècle, pour éclaircir les notions de fonction, de série et d'intégrale. Du vivant même de Fourier, c'est la notion de fonction qui s'est trouvée en débat, comme nous allons le voir, dans l'opposition entre Lagrange et Fourier. Revenons à ces deux formules.

La façon dont Fourier les a présentées (fonction arbitraire, série toujours convergente) est incorrecte en tant qu'énoncé de théorème, mais c'est mieux qu'un énoncé : c'est un programme. Comme Riemann le disait, il est

4. C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques

essentiel de les associer et ce fut le mérite de Fourier. Elles préfigurent toute l'analyse harmonique contemporaine, par le couplage entre l'analyse proprement dite, la détermination de l'amplitude et de la phase à attribuer à chaque harmonique (c'est la formule $c_n = \int$) et la synthèse, qui est le mode de reconstitution du phénomène à partir de ces harmoniques (c'est la formule $f = \Sigma$). Fourier a raison de dire que le calcul des coefficients éclaire le problème des cordes vibrantes, qui avait opposé d'Alembert, Euler et Lagrange à Daniel Bernoulli, au bénéfice de Daniel Bernoulli. L'usage du terme « *harmonique* » est issu de l'analyse et de la synthèse des sons, qui reste aujourd'hui encore l'une des inspirations de la théorie du signal.

Comme programme, il appartenait aux mathématiciens de donner sens à ces formules, dont la signification physique est claire. J'ai dit comment c'était le cas au travers de la notion multiforme d'intégrale, de la mesure de Lebesgue avec son « *presque-partout* », de la sommation des séries, des espaces fonctionnels et en particulier des distributions de Schwartz. Je vais poursuivre en revenant aux notions de fonction et de distribution telles qu'elle apparaissent chez Fourier.

Rigueur et audace

Selon Fourier, qui l'exprime très clairement, si l'on parle d'une fonction, il est essentiel de préciser l'ensemble de définition. Ainsi la fonction égale à x quand $-\pi < x < \pi$ est à distinguer de la fonction égale à x quand $-\pi \leq x \leq \pi$. Cela, qui pour nous est évident, ne l'était pas du tout pour les contemporains de Fourier, et c'est la racine de l'incompréhension de Lagrange à l'égard de Fourier.

Voici ce qu'écrit Riemann :

> « *Quand Fourier, dans un de ses premiers travaux sur la chaleur, présenté à l'Académie des sciences le 21 décembre 1807, énonça pour la première fois cette proposition, qu'une fonction donnée (graphiquement) d'une manière tout à fait arbitraire pouvait s'exprimer par une série trigonométrique, cette assertion parut à Lagrange si inattendue, que l'illustre vieillard la contesta de la manière la plus formelle. Il doit encore exister dans les Archives de l'Académie une pièce écrite (ein Schriftstück) à ce propos.* »

et il ajoute en note qu'il doit cette information à un entretien avec Dirichlet. Je suis parti à la recherche du Schriftstück et je l'ai découvert dans la collection des manuscrits de Lagrange détenue par la Bibliothèque de l'Institut, dans le volume n° 906 (contributions aux méthodes d'interpolation et séries récurrentes) au numéro 40. Chaque contribution contient plusieurs feuilles, et le numéro, avec un titre, figure au dos de la dernière feuille, avec quatre signatures : Lacroix, Legendre (écrit Le Gendre), Prony (écrit De Prony) et Poisson. Le numéro 40, intitulé « *2 pages, papier relatif au mémoire de Fourier* », a une particularité : la seconde page n'est pas de la main de Lagrange. La première page, écrite par Lagrange, prétend montrer que l'équation

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$$

aboutit à une contradiction. La seconde a l'allure d'un brouillon et elle est de la main de Fourier ; elle démonte point par point l'argumentation de Lagrange et conclut en tout petit, au bas de la page :

> « *En général on ne peut point séparer l'usage d'une équation de ce genre des limites entre lesquelles les valeurs de la variable doivent être considérées.* »

Dans le cours du texte de Fourier figurent des inégalités strictes et le fait qu'elles ne peuvent être remplacées en y incluant les bornes.

En 1807 et 1811 Fourier a écrit à Lagrange plusieurs lettres à ce sujet. Après la mort de Lagrange (1813), Fourier a pu découvrir dans ses manuscrits la page le concernant et réagir aussitôt, en laissant son brouillon à coté de la page de Lagrange. En 1815, durant les Cent Jours, Lazare Carnot, ministre de l'Intérieur, a acquis au nom de l'Empereur les manuscrits de Lagrange et les a remis pour classement et publication à la première classe de l'Institut. Le classement a été réalisé par la commission constituée de Legendre, Prony, Lacroix et Poisson. Legendre estimait Fourier. Est-ce à lui qu'est due la décision de joindre les deux feuilles, celle de Lagrange et celle de Fourier. En tout cas, Fourier a su ce qu'il en était. Dirichlet, tout jeune, a fréquenté Fourier. Fourier lui aura parlé de l'opposition de Lagrange et d'un document l'attestant sans dire que Lagrange s'était trompé et que lui, Fourier, l'avait réfuté. A coup sûr, Dirichlet a mentionné ce document (ein Schriftstück) à Riemann. Ce Schriftstück, pour moi, montre que Fourier menait son étude avec rigueur, et qu'à cet égard le reproche exprimé dans le rapport sur le mémoire couronné en 1811 est infondé [K].

On peut relever dans la Théorie analytique de la chaleur des affirmations littéralement incorrectes et des formules qui paraissent aberrantes. Il était de bon ton, il y a 50 ans, de les relever avec condescendance, et il vaut la peine aujourd'hui de les considérer avec respect. Nous avons vu ce qu'il en était des fonctions arbitraires et des séries toujours convergentes. Voici un autre exemple. Lorsqu'au n° 235 Fourier résume les propriétés principales des séries qui portent son nom, il écrit la formule que j'ai déjà relevée (en l'abrégeant) :

$$\begin{aligned}\pi f(x) &= \frac{1}{2}\int f(\alpha)d\alpha + \cos x\int f(\alpha)\cos\alpha d\alpha \\ &\qquad + \sin x\int f(\alpha)\sin\alpha d\alpha + \cdots \\ &= \int f(\alpha)d\alpha\left(\frac{1}{2} + \cos(x-\alpha) + \cos 2(x-\alpha) + \cdots\right)\end{aligned}$$

Darboux, l'éditeur des œuvres de Fourier, dit de la parenthèse que, la série ayant une somme indéterminée, on ne peut attribuer aucun sens à l'expression considérée. Cependant Fourier à répondu à l'avance :

« En désignant par $\Sigma\cos i(x-\alpha)$ la somme de $i=1$ à $i=\infty,\ldots$ l'expression $\frac{1}{2}+\Sigma\cos i(x-\alpha)$ représente une fonction de x et de α telle que, si on la multiplie par une fonction quelconque $F(x)$ et si, après avoir écrit dx, on intègre entre les limites $\alpha=-\pi$ et $\alpha=\pi$, on aura changé la fonction $F(x)$ en une pareille fonction de x, multipliée par la demi-circonférence π. On verra par la suite quelle est la nature de ces quantités, telles que $\frac{1}{2}+\Sigma\cos i(x-\alpha)$, qui jouissent de la propriété qu'on vient d'énoncer. »

Et en effet, à la fin de l'ouvrage (n° 419), il écrit des formules si étonnantes que Darboux ne prend pas la peine de les relever : quand $a<x<b$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\cos p(x-\alpha)dp$$

$$\frac{d^{2i}f(x)}{dx^{2i}} = \pm\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}p^{2i}\cos p(x-\alpha)dp$$

$$\frac{d^{2i+1}f(x)}{dx^{2i+1}} = \pm\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}p^{2i+1}\sin p(x-\alpha)dp$$

Le formalisme de ces formules est excellent, et Fourier ne se trompe pas dans leur emploi. Il nous a donné au n° 235 l'expression de la mesure de Dirac en série de Fourier, il utilise ensuite son expression comme intégrale de Fourier, et il la dérive formellement. Il a donc l'intuition du calcul des distributions, que Laurent Schwartz justifiera beaucoup plus tard.

Actualité de Fourier

Il est temps de retourner aux questions qui se posaient au début de cet article : en quoi consiste et comment s'explique le nouvel intérêt qui se manifeste pour Fourier et son œuvre ?

D'abord, l'analyse de Fourier est partout, et plus que jamais. On la trouve en théorie des nombres et en mécanique quantique comme en acoustique, et aussi en astrophysique et en biologie, via la cristallographie. Elle joue un rôle essentiel en théorie du signal : chaque fois qu'il s'agit d'extraire un signal X d'une observation $Y(=A*X$, A étant lié à l'appareil), on est amené à résoudre une équation $\widehat{A}\widehat{X}=\widehat{Y}$, les chapeaux signifiant la transformée de Fourier. Dans toutes les applications, le calcul rapide de la transformée de Fourier (FFT : fast Fourier transform) a été un progrès décisif (Cooley et Tukey 1965).

Les ondelettes, nouvel avatar des séries et des transformées de Fourier, se sont imposées depuis 1985 comme un nouvel outil à la disposition des ingénieurs et des scientifiques, et un nouvel objet d'étude pour les mathématiciens. Il est bon de rappeler que, si la construction et la théorie sont dues avant tout au mathématicien Yves Meyer, le programme avait été tracé par un physicien, Alex Grossmann et un ingénieur, Jean Morlet. Les ondelettes, qui s'appliquent à la statistique comme à la compression des images, sont un carrefour de disciplines.

Plus récemment, le « *compressed sensing* », inspiré par le traitement des grandes bases de données, est encore un nouvel avatar de l'analyse de Fourier [Do].

Par ailleurs, les développements que Fourier lui-même a donnés de sa théorie de la chaleur pour prédire la température de l'espace et interpréter les températures à la surface du globe terrestre (volume II de ses œuvres) ont attiré l'attention sur « *Fourier et l'effet de serre* ». C'est cela que Wikipedia retient en priorité de l'œuvre de Fourier. On pourrait également mettre en valeur ce que dit Fourier de « *l'économie civile* » et de « *la température des habitations* ».

Plus tard sans doute, on découvrira que Fourier a été un précurseur dans le domaine de l'analyse convexe et de la programmation linéaire, au titre de son « *analyse*

Les citations de Fourier et de Jacobi :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

On voit, par exemple, qu'une même expression, dont les géomètres avaient considéré les propriétés abstraites, et qui sous ce rapport appartient à l'analyse générale, représente aussi le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, qu'elle détermine les lois de la diffusion de la chaleur dans la matière solide, et qu'elle entre dans toutes les questions principales de la théorie des probabilités. »

(Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Discours préliminaire)

« M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait reproche, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »

(C.G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830, Gesammelte Werke, Berlin 1881, p. 454) *indéterminée* », à laquelle Darboux croyait que Fourier avait attribué une importance « *exagérée* ».

Ainsi, depuis cinquante ans, l'actualité de Fourier s'amplifie en évoluant selon les disciplines et les périodes. On peut raisonnablement prédire que Fourier restera actuel pendant longtemps.

Une raison de fond de ce nouvel intérêt est la philosophie de Fourier telle qu'elle se dégage du « *Discours préliminaire* ». J'en ai déjà extrait deux citations, l'une sur l'étude de la nature et la découverte mathématique, l'autre sur l'importance des applications numériques. Nous sommes dans une époque de rapprochement entre les mathématiques et les sciences de la nature, et d'essor de l'informatique. Les phrases de Fourier sonnent aujourd'hui de façon bien plus moderne qu'il y a cinquante ans.

Pour conclure, je désire mettre en regard deux très beaux textes, l'un de Fourier, d'où j'avais extrait la première citation, l'autre de Jacobi dans une lettre à Legendre juste après la mort de Fourier (voir *encadré*). La suite du texte de Fourier est un véritable hymne à l'analyse mathématique, qui « *semble être une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens* ». Le second alinéa contient un puzzle : quelle est la « *même expression* » dont il parle ? Un géologue, T.N. Narasimhan, a récemment exploré la question à la lueur de la correspondance entre Laplace et Fourier ; il ne peut s'agir que de la fonction de Gauss comme solution de l'équation de la chaleur et comme distribution limite en probabilités [N].

Mais Jacobi a parfaitement raison d'écrire que pour Fourier, « *le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels* ». Pour le jeune Jacobi alors en train de fonder la théorie moderne des fonctions elliptiques, c'est « *l'honneur de l'esprit humain* ». La formule de Jacobi (dont on peut admirer, en tant qu'Allemand, le maniement de la langue française) a été reprise comme titre dans un ouvrage de Jean Dieudonné [Di] et elle a imprégné des générations de mathématiciens.

Ma conclusion paraîtra peut-être inattendue. Il est clair que Jacobi s'oppose à Fourier, et que je place Fourier au plus haut rang, par ses œuvres et par sa philosophie, dans le Panthéon de la science. Il est clair que Jacobi exagère en parlant du « *but unique de la science* ». Mais, outre « *l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels* », il faut en science se laisser porter aussi par l'enthousiasme et le rêve. J'aime chez Fourier l'esprit des Lumières, et chez le jeune Jacobi les excès poétiques du romantisme.

POUR EN SAVOIR PLUS

[DR] Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, Fourier, créateur de la physique mathématique, Belin 1999.

[Di] Jean Dieudonné, Pour l'honneur de l'esprit humain, Hachette 1987.

[Do] D.L. Donoho, Compressed sensing, IEEE Transactions Information Theory 52 (2006), pp. 1289-1306.

[F] Joseph Fourier, œuvres, éditées par Gaston Darboux, Gauthier-Villars 1888-1890.

[K] Jean-Pierre Kahane, Proc. Symp. Pure Math. 79 (2008), 187-205.

[L] J.-L. Lagrange, Manuscrits, volume 906, Bibliothèque de l'Institut de France.

[N] T.N. Narasimhan, Laplace, Fourier and stochastic diffusion (2009), arXiv 0912.2798.