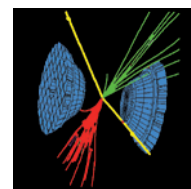


Théorie des cordes et gravité quantique



La théorie des supercordes réconcilie la mécanique quantique et la théorie de gravitation d'Einstein. Elle a passé plusieurs tests qui auraient pu lui être fatals : absence d'anomalies, calcul de l'entropie de trous noirs ou incorporation de toutes les formes connues de la matière et de leurs interactions. Cependant, sa construction mathématique reste incomplète et ses ingrédients physiques – supersymétrie, unification, dimensions supplémentaires – n'ont pas encore été vus. Affaire donc à suivre sur les deux plans.

La force gravitationnelle est une force singulière. Elle est tellement faible qu'elle ne joue aucun rôle à l'échelle atomique et à l'échelle nucléaire, où la physique est régie par les trois autres interactions fondamentales ainsi que par les lois de la mécanique quantique. L'attraction gravitationnelle entre deux électrons est, par exemple, 10^{43} fois plus faible que leur répulsion de Coulomb. Autant dire qu'à ce niveau elle est totalement non pertinente. Si elle domine les phénomènes physiques à plus grande échelle, c'est parce que les objets macroscopiques, tels que les corps célestes, sont électriquement neutres, et que les deux autres forces, celle dite « faible » et la force nucléaire, sont de courte portée. Comme les objets macroscopiques sont essentiellement classiques, la gravité et la mécanique quantique ne semblent donc pas avoir de terrain commun d'application.

Pourquoi, alors, les physiciens s'obstinent-ils à vouloir marier la mécanique quantique avec la théorie de relativité générale d'Einstein ? Tout d'abord parce qu'il s'agit là des deux grandes révolutions scientifiques du vingtième siècle, et que le fait qu'elles ne soient pas compatibles est profondément gênant. Mais aussi parce que, si la mécanique quantique n'influence plus le mouvement des corps célestes aujourd'hui, ceci n'a pas toujours été le cas. Nous pensons que notre univers a été formé par les débris d'une explosion primordiale, le Big-Bang, durant laquelle les phénomènes quantiques ont joué un rôle important. Or ces instants initiaux sont déterminants pour la structure à grande échelle de notre univers, telle qu'on l'observe actuellement. Enfin, il y a des raisons de croire que la résolution du conflit entre la mécanique quantique et la relativité générale aurait des conséquences indirectes, telle que l'existence de nouvelles formes de la matière, qui pourraient se manifester à basse énergie. Nous y reviendrons plus loin.

Tâchons d'abord de comprendre l'origine du problème. La théorie d'Einstein décrit l'espace-temps comme un milieu continu à géométrie variable qui, tel une membrane élastique, est déformé par la présence de corps massifs ou de toute autre forme d'énergie. Plus un corps est dense, plus la déformation de l'espace-temps est importante. Dans le cas extrême, celui d'un *trou noir*, la forme exacte de la géométrie a été trouvée par le physicien allemand Karl Schwarzschild en 1915, l'année même où Einstein publia sa théorie de la gravitation. La solution de Schwarzschild se caractérise par une surface sphérique qui délimite une région de l'espace d'où rien, même pas la lumière, ne peut s'échapper. C'est l'*horizon* du trou noir, un barrage en apparence absolu à toute forme de communication avec l'extérieur. La taille de l'horizon est donnée par le rayon de Schwarzschild, $r_0 = 2G M/c^2$, où G est la constante de Newton, M la masse du trou noir et c la vitesse de la lumière. Plus la masse est grande, plus le trou est volumineux.

Supposons maintenant qu'on veuille sonder la structure de l'espace-temps à l'aide d'un faisceau lumineux. La longueur d'onde caractéristique (ℓ) de la lumière est égale au pouvoir de résolution souhaité. Or, selon les règles de la mécanique quantique, chaque photon d'un tel faisceau a une énergie de l'ordre de $\hbar c / \ell$, qui déforme dans son voisinage l'espace-temps. Si on remplace Mc^2 par cette énergie, on trouve que le rayon de Schwarzschild du photon vaut $r_0 = 2\ell_p^2 / \ell$, où $\ell_p \equiv (G\hbar / c^3)^{1/2}$ est une unité de longueur dite longueur de Planck. On voit que pour $\ell \ll \ell_p$ il y aurait problème : notre photon-sonde serait un trou noir plus grand que la résolution souhaitée ! On en déduit que, aux échelles inférieures à ℓ_p , la notion d'espace-temps continu ne peut pas correspondre à une réalité physique, et qu'elle doit être remplacée par une description microscopique plus fine.

Article proposé par :

C. Bachas, bachas@lpt.ens.fr

Laboratoire de Physique Théorique, UMR 8549, CNRS/ENS Paris, Paris



Une autre facette de ce même problème est la *non-renormalisabilité de la gravité*. Rappelons nous qu'en mécanique quantique on associe une amplitude à chaque histoire d'évolution d'un système entre un état initial, A, et un état final, B. Les détails « virtuels » de cette histoire, ceux qu'on n'observe pas, peuvent inclure des processus dont la durée et l'étendue spatiale sont arbitrairement petits. Dans les théories renormalisables, l'effet de ces processus aux très courtes échelles est plutôt bénin, et ils ne font que redéfinir certains paramètres de la théorie. Mais dans la théorie de relativité d'Einstein les processus virtuels à l'échelle ℓ_p modifient le tissu de l'espace-temps d'une façon qu'on ne sait pas contrôler. C'est le problème de la gravité quantique.

Différentes idées ont été mises en avant pour décrire la structure microscopique de l'espace-temps à l'échelle de Planck : triangulations dynamiques, gravitation quantique à boucles, géométrie non commutative, théorie des (super)cordes. Si aucune n'est, à l'heure actuelle, entièrement satisfaisante, c'est la théorie des cordes qui a été la plus développée pour trois raisons : (i) parce qu'elle a su surmonter plusieurs obstacles, dont certains auraient pu lui être fatals ; (ii) parce que certains de ses ingrédients (*la supersymétrie, les dimensions supplémentaires, la grande unification*) ont été proposés indépendamment, motivés par des considérations physiques différentes ; et (iii) parce que sa structure mathématique s'est avérée très riche, permettant d'approfondir la connaissance de nos théories existantes.

L'hypothèse de base en théorie des cordes est que les particules élémentaires correspondent aux états quantiques d'un objet étendu unidimensionnel, la « corde fondamentale » (voir *figure 1*). Les attributs intrinsèques de la particule : masse, spin, charge électrique etc., proviennent du mouvement de la corde dans le référentiel où son centre est au repos. L'idée d'un objet fondamental étendu remonte à un article de P.A.M. Dirac en 1962, mais c'est six ans plus tard que la théorie des cordes est

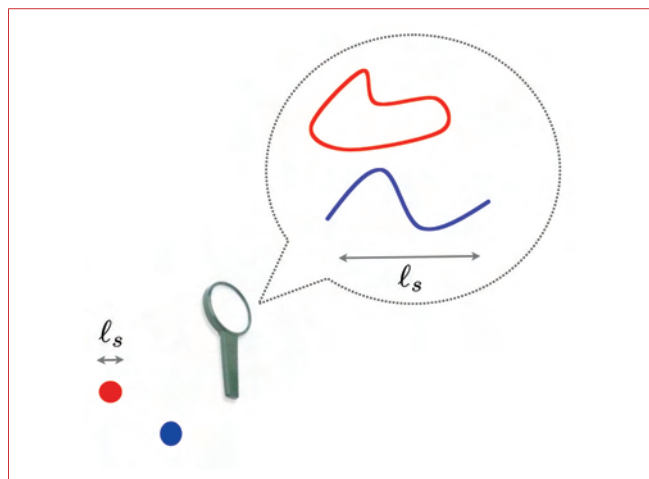


Figure 1 – Vue de très loin, une corde (ouverte ou fermée) apparaît comme une particule ponctuelle. La masse, le spin et la charge électrique de la particule s'identifient, respectivement, à l'énergie de vibration de la corde, son moment cinétique interne, et sa quantité de mouvement dans une dimension compacte.

réellement née, avec la célèbre formule de diffusion de Gabriele Veneziano. Il a fallu encore six ans avant que Joël Scherk, John Schwarz et Tamiaki Yoneya ne reconnaissent dans cette théorie une candidate pour la quantification de l'interaction gravitationnelle. Que la théorie des cordes contienne la théorie d'Einstein est un premier fait étonnant, qui mérite qu'on s'y attarde un instant.

La relativité générale, et plus

Le médiateur de l'interaction gravitationnelle dans la théorie d'Einstein est une particule de spin $2\hbar$ et de masse nulle, le *graviton*. De même que le photon est la particule qui correspond aux ondes électromagnétiques, le graviton est la particule qui correspond aux ondes gravitationnelles, voire aux variations de la métrique de l'espace-temps. Or il se trouve, justement, qu'un état de masse nulle et de spin $2\hbar$ fait toujours partie du spectre d'une corde fermée, et que ses interactions (voir plus bas) obéissent aux mêmes principes d'invariance que dans la théorie d'Einstein. La théorie des cordes est donc, qu'on le veuille ou non, une théorie gravitationnelle.

Mais le fait encore plus surprenant est que les processus microscopiques divergents, ceux-là mêmes qui rendent la théorie d'Einstein non-renormalisable, semblent être absents en théorie des cordes. Il n'existe en effet pas de processus virtuels en deçà d'une échelle minimale, la longueur caractéristique des cordes $\ell_s \equiv (\hbar c / T_s)^{1/2}$, où T_s est la *tension de la corde*, c'est-à-dire la force nécessaire pour qu'elle reste tendue. Comme on ne peut pas confiner une corde relativiste dans une région de taille inférieure à ℓ_s , cette longueur représente, grosso modo, la maille minimale du tissu de l'espace-temps. La théorie des cordes « fait donc mieux » qu'une théorie renormalisable : les amplitudes quantiques sont *finies*, sans même le besoin de cacher des divergences dans la définition de paramètres effectifs.

Soyons plus précis : l'absence de divergences en théorie des cordes n'a pas encore le statut d'un théorème mathématique. Mais elle est vérifiée par de nombreux calculs, y inclus un qui a marqué les esprits : le calcul d'annulation des anomalies, fait en 1984 par Michael Green et John Schwarz. Les anomalies sont des divergences irréductibles qui violent les symétries classiques d'une théorie, en l'occurrence l'invariance par reparamétrisation de l'espace-temps. Cette violation aurait été fatale, car la physique dépendrait du choix arbitraire d'horloges et de mesures. En étudiant les amplitudes des cordes, Green et Schwarz ont montré comment l'invariance est rétablie par un mécanisme très subtil qui porte leurs noms.

Cette cohérence mathématique de la théorie des cordes a cependant un prix : il faut admettre que l'espace-temps a dix – plutôt que quatre – dimensions, et qu'il existe une nouvelle forme de matière et une nouvelle symétrie, reliant bosons et fermions, la *supersymétrie*. Nous ne pouvons pas entrer ici dans les détails techniques de ces



affirmations, et il n'existe pas à ma connaissance d'argument intuitif simple. Mais notre monde n'a que quatre dimensions visibles, et les particules supersymétriques, si elles existent, sont beaucoup plus lourdes que leurs partenaires de la matière ordinaire. Il faut donc admettre que six de ces dix dimensions sont celles d'une variété compacte, Y_6 , suffisamment petite pour qu'on ne puisse pas la « voir » avec nos instruments présents ; et que la supersymétrie des équations de la physique n'est pas manifeste, car elle est spontanément brisée (de même que la symétrie par rotation des équations de Newton n'est pas une symétrie des orbites planétaires).

Pour le lecteur non-averti, l'idée que la quantification de la gravité imposerait tous ces nouveaux ingrédients paraît excessive. Ne suffirait-il pas, après tout, de remplacer l'espace continu par un réseau, comme on le fait en physique de la matière condensée, ou d'introduire n'importe quel autre paramètre de coupure qui supprimerait les fluctuations quantiques à l'échelle de Planck ? La réponse est qu'il n'est pas si simple de respecter simultanément le principe de la causalité et l'invariance par reparamétrisation de l'espace-temps. Or, si on ne respecte pas ces principes à l'échelle de Planck, on n'est pas sûr de les retrouver à plus grande échelle. Par exemple, si un signal se propage plus vite que la lumière sur une distance ℓ_p , il pourrait le faire aussi sur une distance astronomique. La théorie des cordes respecte ces deux principes, et c'est la seule solution connue à l'heure actuelle qui possède ces propriétés. Ce qui ne veut pas dire qu'il n'en existe pas d'autres.

Dualités, M-théorie et D-branes

Une corde peut se diviser en deux ou, inversement, deux cordes peuvent se joindre pour en former une seule. Il s'agit d'événements locaux dans l'espace et le temps : les cordes se touchent en un point, à un instant donné (voir *figure 2*). Ceci garantit que la théorie est causale. Pour la même raison, l'intensité de l'interaction ne dépend pas de l'état des cordes qui y participent. Car ce qui détermine s'il s'agit de photons, de gravitons, d'électrons ou de toute autre particule élémentaire, ce sont les vibrations des cordes sur toute leur longueur, pas seulement au point où elles rentrent en contact. En comparaison, dans les théories conventionnelles, l'intensité d'interaction entre chaque triplet de particules (A , B et C) est un paramètre indépendant, contraint seulement par les symétries du problème. Par contre, dans la théorie des cordes toutes les interactions ont une origine et une intensité communes, elles sont donc *unifiées*. Nous verrons la conséquence de ce fait à la fin de l'article.

Le diagramme dans la partie droite de la *figure 2* est un exemple de « vertex d'interaction ». Son amplitude, ou « constante de couplage » (λ_{ABC}) détermine son intensité. Des suites de tels événements élémentaires produisent des processus plus complexes. Selon les règles de la mécanique quantique, l'amplitude d'évolution entre un état initial et un état final s'écrit comme une somme sur toutes

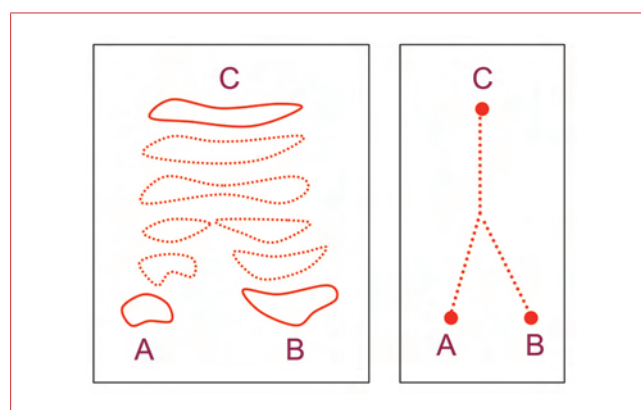


Figure 2 – À gauche : l'interaction de deux cordes qui se joignent pour former une seule corde. À droite : le même diagramme dans la limite de particules ponctuelles.

les histoires intermédiaires, c'est-à-dire toutes les suites d'événements élémentaires qui conduisent, *in fine*, au même résultat. Cette écriture de la théorie en termes de diagrammes de Feynman est, en fait, un développement perturbatif. Si λ_{ABC} est petit, les vertex sont rares, tandis que dans le cas contraire le résultat est dominé par un nombre arbitrairement grand de vertex, et cette méthode de calcul perd de son intérêt.

La théorie des cordes n'est définie à présent qu'en termes de règles de Feynman, qu'on interprète comme des développements perturbatifs autour de certaines géométries de fond. Les géométries admissibles sont des solutions des équations d'Einstein, ou plutôt de celles des *supergravités* qui les remplacent, à dix dimensions. Il existe une multitude de solutions, de type par exemple $R^{1,3} \times Y_6$, où $R^{1,3}$ est notre espace-temps visible et Y_6 la variété compacte six-dimensionnelle qu'on vient de rencontrer plus haut. Un exemple simple de variété compacte est le tore, un espace dont chacune des dimensions est sous forme de cercle de rayon suffisamment petit pour échapper à la détection. Si Y_6 n'est pas directement visible, son choix est néanmoins important car il détermine le contenu en particules légères, ainsi que leurs interactions dans la théorie effective à basse énergie [pensez à Y_6 comme un tambour dont seules les fréquences les plus basses nous sont audibles].

Comprendre le mécanisme qui détermine ce choix est un problème ouvert de la théorie des cordes. Si on savait y répondre, on saurait calculer *ab initio* tous les paramètres libres du Modèle Standard de la physique des hautes énergies. On n'en est pas là. Mais il est, au moins, intéressant de noter que le problème se pose en des termes dynamiques : les différentes compactifications, Y_6 , correspondent à des phases différentes d'une même théorie. Ou plutôt, comme on le croyait au début, de cinq théories différentes : les deux théories hétérotiques, $E_8 \times E_8$ ou $SO(32)$, et les théories de type I, IIA et IIB. Ces noms obscurs font référence à la structure intrinsèque de la corde, et notamment à ses coordonnées anticommutantes qui forment, avec les coordonnées habituelles, un *super-espace*



à dix dimensions. On ne rentrera pas ici dans les détails techniques de ces constructions. Il suffit de dire que ce sont les seuls choix qui conduisent à une théorie de cordes consistante avant compactification.

Un pas important a été franchi en 1995 quand, suite aux travaux de Chris Hull, Paul Townsend et Edward Witten, l'hypothèse a été émise que ces cinq théories perturbatives de cordes seraient les descriptions duales d'une théorie sous-jacente unique, la *M-théorie*. Cette théorie admettrait aussi comme solution l'espace-temps plat à onze dimensions, et sa limite de basse énergie dans ce fond serait la supergravité maximale découverte, en 1978, par Eugène Cremmer, Bernard Julia et Joël Scherk. Il n'y a pas actuellement de définition non-perturbative de la M-théorie, qui permettrait de démontrer ces hypothèses. Mais à chaque fois qu'on a pu tester leurs conséquences, elles ont été vérifiées.

Afin de mieux comprendre ces affirmations il faudra parler de phénomènes non-perturbatifs, c'est-à-dire de phénomènes qui ne sont pas captés par les règles de Feynman. Un exemple de tels phénomènes est l'existence de *solitons*. Les solitons sont des excitations non-dispersives, obtenues comme solutions des équations non-linéaires d'une théorie de champs. Un soliton complètement localisé se comporte comme une particule ponctuelle, tandis que s'il n'est que partiellement localisé il correspond à un objet étendu, comme par exemple une ligne de vortex ou une interface. Dans la physique des hautes énergies, les théories de jauge de grande unification ont des solitons qui portent une charge magnétique. Leur masse est de quelque vingt ordres de grandeur supérieure à celle d'un électron, c'est pourquoi on ne les produit pas dans les accélérateurs de particules. Mais si les monopoles magnétiques existent, il faut modifier les équations de Maxwell en introduisant une densité de charge magnétique et un courant magnétique, ce qui donnerait (en unités cgs) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 4\pi\rho_m, & -\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m. \end{aligned}$$

Ces équations modifiées de Maxwell sont invariantes si on remplace $(\vec{E}, \rho_e, \vec{j}_e)$ par $(\vec{B}, \rho_m, \vec{j}_m)$, et $(\vec{B}, \rho_m, \vec{j}_m)$ par $(-\vec{E}, \rho_e, \vec{j}_e)$, c'est-à-dire si on échange « magnétique » et « électrique ». Mais la théorie microscopique sous-jacente ne paraît pas *a priori* invariante par cet échange, car la charge électrique est portée par les particules élémentaires tandis que la charge magnétique l'est par des solitons... À moins qu'il n'existe une description *duale*, dans laquelle les rôles des particules élémentaires et des solitons sont échangés. On connaît bien une situation analogue en mécanique quantique, où tout est à la fois onde et particule. Aucune de ces deux descriptions n'est plus fondamentale que l'autre, mais l'une des deux peut être mieux adaptée dans un contexte physique donné. De même, la dualité électrique-magnétique impliquerait qu'il existe deux descriptions équivalentes de la même physique, et

que le choix de l'une ou de l'autre est une question de commodité.

L'hypothèse est difficile à tester, car la charge minimale magnétique est donnée par la condition de quantification de Dirac : $g = 3\hbar c / 2e$ où e est la charge de l'électron (et $-e/3$ la charge du quark down). Puisque la charge de l'électron est très petite, $\alpha \equiv e^2 / \hbar c \simeq 1/137$, la théorie magnétique est forcément fortement couplée, $g^2 / \hbar c \simeq 308$. Il est donc difficile de s'en servir pour faire des calculs. Mais comme David Olive et Edward Witten l'ont remarqué en 1978, la supersymétrie peut venir ici à l'aide. En effet, dans les théories avec un nombre $N = 2$ ou $N = 4$ de supersymétries, il est possible de calculer certaines masses de particules chargées par des techniques purement algébriques, même dans le régime de couplage fort. En comparant les expressions de ces masses, dites « protégées », dans les théories électrique et magnétique, on a pu tester la conjecture de dualité.

C'est par une extension de ces idées que Hull, Townsend et Witten ont émis la conjecture selon laquelle toutes les théories perturbatives des supercordes sont des descriptions duales d'une même théorie. La *figure 3* montre la toile de différentes dualités. Les flèches rouges échangent les cordes fondamentales d'un côté avec les cordes solitoniques de l'autre, et la constante de couplage d'une théorie avec l'inverse du couplage de l'autre. Ces dualités ressemblent donc aux dualités électrique-magnétique de la théorie des champs. On ne les vérifie que partiellement. Les flèches bleues échangent par contre différents états des cordes fondamentales, après compactification sur un cercle de rayon R et ℓ_s^2 / R . Il s'agit de relations de dualité qu'on peut vérifier explicitement, en traitant les deux côtés en perturbation. Enfin, les flèches vertes identifient les théories IIA et $E_8 \times E_8$ dans leur limite de couplage fort à une phase conjecturée de la théorie M, qui fait apparaître une onzième dimension de l'espace-temps. Cette dimension serait compactée sur un cercle ou un segment qui, dans la limite perturbative des

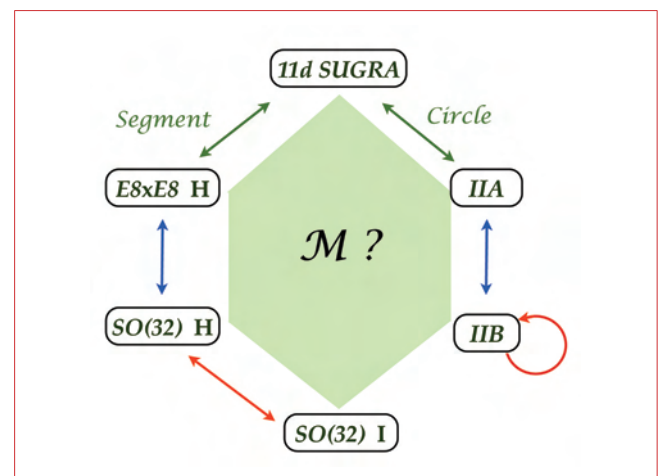


Figure 3 – Les cinq théories perturbatives de cordes à dix dimensions et leurs relations de dualité. Deux parmi ces cinq théories seraient obtenues, par compactification sur un segment ou un cercle, à partir d'une théorie dont la limite basse-énergie est la supergravité maximale à onze dimensions.



cordes, seraient suffisamment petits pour ne se manifester qu'indirectement. Comme pour la dualité électrique-magnétique, toutes ces identifications ne sont à présent que partiellement testées, dans les situations où la protection supersymétrique l'autorise.

L'intérêt des dualités est d'avoir ouvert une fenêtre sur les phénomènes non-perturbatifs de la théorie des cordes. Sur le plan conceptuel, il est étonnant de penser que le problème de la gravité quantique pourrait trouver, en la théorie M, sa seule solution mathématique. Mais de manière plus concrète, ce qui a été au cœur des développements plus récents, c'est la découverte des *D-branes*. Une D_p -brane est un objet p -dimensionnel sur lequel les bouts de cordes ouvertes peuvent s'accrocher. C'est Joe Polchinski qui a le premier réalisé que les D-branes sont des solitons dans les théories des cordes I, IIA et IIB. Leur existence est requise par les relations de dualité. La D1-brane, par exemple, ou D-corde est le soliton dual à la corde fondamentale de la théorie IIB, tandis que la D0-brane de la théorie IIA est duale aux particules de la supergravité maximale avec impulsion dans la onzième dimension. La définition, presque poétique, des D-branes décrit en fait leurs caractéristiques avec précision, et permet de vérifier ces hypothèses.

Dans une théorie de champs conventionnelle, les excitations de basse énergie en présence d'un ou de plusieurs solitons se séparent en deux groupes : (i) les modes loin des solitons, et (ii) les modes associés aux solitons qu'on appelle leurs coordonnées collectives. Ces deux types d'excitations, dans le cas des D-branes, correspondent aux états légers des cordes (i) fermées et (ii) ouvertes. Regardons l'exemple d'une paire de D2-branes sur la [figure 4](#). On notera que les cordes ouvertes portent un double label, $[ij]$, indiquant les D2-branes auxquelles chacune de leurs extrémités est attachée. Les coordonnées collectives de n D-branes sont donc naturellement des matrices, et on peut montrer que la dynamique est régie par une théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe de symétrie $U(n)$. Le double rôle des D-branes, comme solitons d'une théorie de gravitation d'un côté, et habitats de théories non-abéliennes de jauge de l'autre, est à la base des développements suivants.

Trous noirs et holographie

Les solitons de la théorie d'Einstein sont les trous noirs. Ce ne sont pas des solitons comme les autres, car leur centre est caché par un horizon. L'observateur lointain voit le temps s'arrêter près de l'horizon d'un trou noir, et toutes les fréquences se décaler vers l'infrarouge. Même la lumière ne se propage plus, de telle sorte qu'aucun signal ne peut lui parvenir de l'intérieur.

Cette image classique est modifiée en mécanique quantique, car un trou noir peut s'évaporer par effet tunnel. Stephen Hawking a en effet montré, en 1974, que dans l'approximation semi-classique un trou noir rayonne

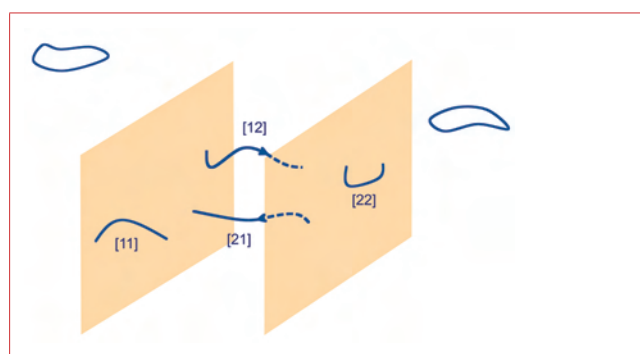


Figure 4 – Une paire de D2-branes, et les quatre types de cordes orientées ouvertes qui peuvent s'y attacher.

comme un corps noir à la température $k_B T_H = \hbar c^3 / 8\pi GM$. La première loi de la thermodynamique, $\delta E = T\delta S$, implique alors que le trou noir est aussi doté d'une entropie, dont l'expression avait été conjecturée auparavant par Jacob Bekenstein :

$$S_{\text{BH}} = \frac{4\pi k_B G^2 M^2}{\hbar c} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A_H.$$

Cette relation entre l'entropie et l'aire de l'horizon, A_H , se généralise aux trous noirs chargés avec spin, ainsi que quand l'espace-temps a des dimensions supplémentaires. Pour se faire une idée des quantités fantastiques en jeu, notons qu'un trou noir de masse solaire aurait une température d'environ 10^{-7} K, et une entropie de $\sim 10^{76}$ bytes (l'équivalent de 10^{65} disques durs de 100 Gigaoctets, ou encore de 10^{21} soleils).

En mécanique statistique, l'entropie d'un système s'écrit $S = k_B \log \mathcal{N}(E)$, où $\mathcal{N}(E)$ est le nombre d'états quantiques à une énergie donnée. L'équation d'état pour la densité d'entropie, $S/V = f(E/V)$, dépend des détails microscopiques du système, et ne peut pas être obtenue par des considérations de thermodynamique pure. En revanche, comme on vient de voir, l'équation d'état d'un trou noir est fixée par le calcul semi-classique de Hawking. C'est une équation universelle et simple. Mais une théorie microscopique de la gravité doit être aussi en mesure de compter les micro-états du trou noir, et de retrouver l'entropie de Bekenstein-Hawking par un calcul statistique. C'est ce qu'Andrew Strominger et Cumrun Vafa ont réussi à faire en 1996, en modélisant le trou noir par un assemblage de cordes et de D-branes. Leur calcul est un nouveau test de cohérence de la théorie, qui aurait pu lui être fatal.

Le trou noir de Strominger-Vafa est illustré par la [figure 5](#). L'espace-temps asymptotique a cinq dimensions non-compactes, et cinq autres compactées sur un tore. Le soliton est constitué par N_5 D5-branes enroulant le tore, N_1 D1-branes enroulant un des cercles du tore avec rayon R , et par des cordes ouvertes en mouvement sur ce cercle avec impulsion totale égale à N_p/R . Les détails de cet assemblage ne seraient visibles que si les dimensions compactes étaient assez grandes pour ne pas être cachées. Dans le cas contraire, on ne verrait qu'une particule à cinq dimensions portant trois charges, proportionnelles

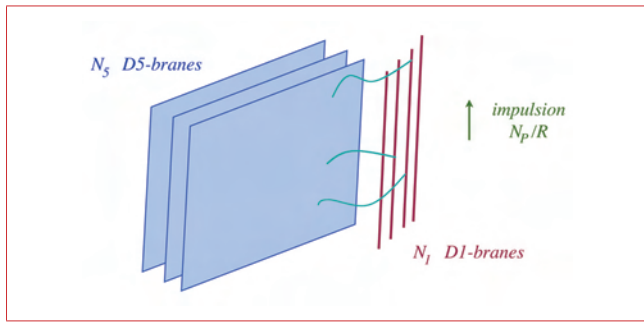


Figure 5 – Image microscopique d'un trou noir avec trois charges différentes à 5 dimensions. Les charges correspondent aux nombres N_1 et N_5 de D-branes, et à l'impulsion totale dans la dimension commune compacte avec rayon R .

aux trois nombres entiers N_1 , N_5 et N_p (notez que l'impulsion dans une dimension compacte est discrète). Si le nombre de constituants est grand, la particule peut être assez lourde pour former un trou noir. Son entropie, calculée dans l'approximation semi-classique de la supergravité effective, est $S_{\text{BH}} = k_B 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_p}$. Les micro-états de l'assemblage, de l'autre côté, correspondent aux différentes façons de distribuer l'impulsion totale N_p/R parmi les $8N_1 N_5$ états légers de la corde ouverte, dont la moitié sont des fermions et les autres des bosons. On retrouve alors l'entropie géométrique par un calcul combinatoire dans la limite où N_p est grand.

Il n'est pas *a priori* évident qu'on avait le droit de comparer ces deux calculs. La formule de Bekenstein-Hawking est valide pour de grands trous noirs, tandis que pour le calcul microscopique on doit supposer que les interactions entre les cordes ouvertes sont négligeables. Or il se trouve que ces deux hypothèses sont incompatibles. Heureusement, comme pour la dualité électrique-magnétique, la supersymétrie vient ici en aide. Pour certains trous noirs *supersymétriques* (dont la masse est égale au minimum compatible avec leurs charges) l'entropie est une quantité qui ne varie pas quand on l'extrapole du régime de couplage faible au régime de couplage fort. La configuration de la *figure 5* est supersymétrique quand toutes les cordes ont le même sens de mouvement (sinon l'énergie ne serait pas minimale à N_p fixé). C'est dans cette hypothèse que le calcul combinatoire doit être fait, si on veut le comparer au résultat de la gravitation.

Même si elle n'est pas facile à vérifier, la dualité entre la description géométrique et celle en termes de D-branes s'applique dans de nombreux contextes. Là où elle prend une forme particulièrement surprenante, c'est dans le cas de n D3-branes, parallèles et étendues à l'infini. L'étude de ce système a conduit Juan Maldacena à proposer, en 1997, la célèbre conjecture AdS/CFT : l'équivalence entre la théorie de Yang-Mills avec groupe de jauge $U(n)$ qui vit sur les D3-branes, et la théorie de cordes dans la géométrie $AdS_5 \times S^5$ qui décrit le voisinage de l'horizon (voir *encadré*). La formulation mathématique de cette conjecture, complétée par Steve Gubser, Igor Klebanov, Alexander Polyakov et Edward Witten, a rendu précise l'hypothèse holographique qui était défendue auparavant

par Gerard 't Hooft. Ce qui surprend est qu'une théorie gravitationnelle puisse être équivalente à une théorie de champs « banale » à quatre dimensions.

La conjecture AdS/CFT a passé avec succès tous les tests auxquels elle a été soumise. Combinée avec des méthodes d'intégrabilité, elle pourrait aboutir à la solution exacte de la théorie de Yang-Mills, avec supersymétrie maximale, dans la limite dite « planaire » ($n \rightarrow \infty$ avec $\lambda \equiv g^2 n$ fini). Certes, cette théorie n'est pas réaliste, mais elle a des liens de parenté avec la chromodynamique quantique (QCD) qui est à présent la meilleure théorie des interactions fortes. La QCD a, en fait, un double visage : sa constante de couplage est faible à très haute énergie, où l'approche perturbative est adéquate, mais elle devient forte à basse énergie, où le seul outil fiable actuellement est la simulation numérique de la théorie sur réseau. Toute approche analytique de ce deuxième régime, même dans une théorie de jauge peu réaliste, serait intéressante. D'autant plus que certaines grandeurs dynamiques, comme par exemple les coefficients de transport d'un plasma de quarks et gluons, ne sont pas accessibles par le calcul numérique.

Quelle vérification expérimentale ?

La théorie des cordes apporte donc des réponses à certains problèmes de la gravité quantique. Elle est aussi d'une grande richesse mathématique, et les outils développés en son sein (les théories conformes, les méthodes de calcul des amplitudes, ou encore la correspondance AdS/CFT) ont d'autres domaines d'application. Mais comment tester cette théorie au laboratoire, sans accès direct à la physique à l'échelle de Planck ? Le sujet est vaste, on se contentera ici de quelques brèves remarques.

Nous avons déjà évoqué deux ingrédients nécessaires pour la cohérence mathématique de la théorie des cordes : les dimensions supplémentaires et la supersymétrie. Puisqu'on n'a vu ni l'un ni l'autre, pour l'instant, les six dimensions supplémentaires doivent être enroulées en une variété compacte, et la supersymétrie doit être spontanément brisée. Deux autres prédictions génériques de la théorie sont l'unification des interactions, et l'existence de particules très légères, les « modules », qui véhiculent une cinquième force d'ordre gravitationnelle mais de courte portée. Quelles sont les grandeurs caractéristiques de ces nouveaux phénomènes ? Pour y répondre il faut choisir un parmi les très nombreux modèles de compactification (c'est-à-dire une parmi les solutions de type $R^{1,3} \times Y_6$ mentionnées plus tôt). Or, dans le cadre mathématique actuel il n'existe pas de principe dynamique qui permette de fixer ce choix. Il se peut même que cette impossibilité soit inhérente à toute théorie de la gravité quantique, comme certains physiciens ont argumenté.

Une approche moins ambitieuse est de chercher des conséquences génériques de la théorie, c'est-à-dire celles qui sont valables pour des classes entières de compactifications. Il existe deux grandes classes de modèles : ceux



Encadré 1 *La dualité holographique*

En présence de n D3-branes coïncidentes, la métrique de l'espace-temps à dix dimensions s'écrit

$$ds^2 = f^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x}) + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2),$$

où $f = 1 + L^4/r^4$, \vec{x} sont les coordonnées le long des 3-branes, $d\Omega_5^2$ la métrique de la 5-sphère qui les entoure, et r la coordonnée radiale. Cette géométrie interpole entre la région asymptotique plate à $r \rightarrow \infty$, et la région proche de l'horizon, $r \rightarrow 0$ (voir la *figure E1*). La métrique au voisinage de l'horizon,

$$ds^2 \simeq \frac{L^2}{\rho^2}(-dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} + d\rho^2) + L^2 d\Omega_5^2$$

où $\rho \equiv L^2/r$, décrit l'espace-temps $AdS_5 \times S^5$. La célèbre image d'Escher (*figure E1* en bas à droite) illustre le changement d'échelle si on se déplace dans l'espace anti-de Sitter dans la direction radiale ρ .

Les excitations de basse énergie de ce système ont une double description. Dans l'image branaire, ce sont les modes légers de cordes ouvertes, correspondant à une théorie de Yang-Mills, avec groupe de jauge $U(n)$, à quatre dimensions. Dans l'image géométrique, par contre, tout ce qui est

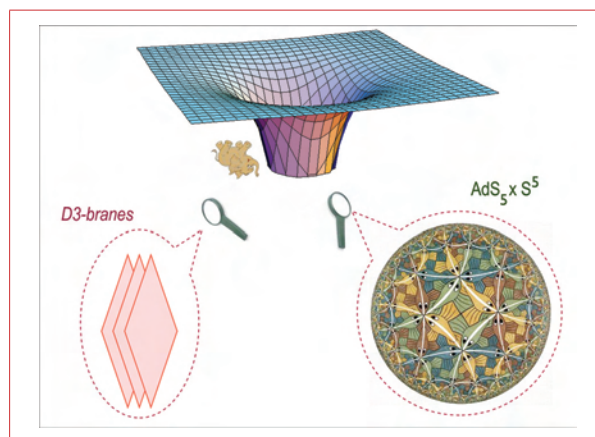


Figure E1 – La géométrie de D3-branes et son horizon.

suffisamment près de l'horizon a une énergie arbitrairement basse. On doit donc considérer la théorie de cordes toute entière dans $AdS_5 \times S^5$. La conjecture AdS/CFT propose que ces deux descriptions sont équivalentes.

construits à partir de la théorie hétérotique, et les modèles « d'orientifold » ou « de branes en intersection ». Les principales caractéristiques du Modèle Standard, le groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ et les trois familles de quarks et leptons, émergent naturellement dans les deux classes. Les modèles branaires ont une phénoménologie très riche allant, dans des cas extrêmes, jusqu'à permettre l'existence de dimensions supplémentaires à des énergies accessibles au grand collisionneur de Genève, le LHC. Nous ne discuterons pas cette hypothèse ici. Nous nous limiterons plutôt aux modèles dans lesquels ℓ_s et la taille des dimensions compactes sont toutes les deux proches de l'échelle de Planck. Les conséquences expérimentales de la théorie des cordes ne peuvent être, dans ce cas, que indirectes, se manifestant dans des phénomènes rares, des situations extrêmes d'astrophysique, ou par la « postdiction » des paramètres de la physique connue aux basses énergies.

Revenons justement au Modèle Standard. Une extension très élégante de cette théorie est celle de la Grande Unification supersymétrique. Elle est basée sur l'hypothèse que les interactions fortes et électrofaibles sont issues d'une théorie de jauge dont la symétrie englobe celle du Modèle Standard (les groupes de jauge favoris sont $SU(5)$, $SO(10)$ ou encore E_6). Cette grande symétrie est spontanément brisée de telle sorte que les bosons de jauge supplémentaires acquièrent une masse de l'ordre d'une échelle caractéristique M_U . Si les trois forces ont des intensités α différentes à plus basse énergie, c'est parce qu'elles sont écrantées de manière différente par la polarisation quantique du vide. En équations :

$$\alpha_j(E)^{-1} \simeq \alpha_U^{-1} + b_j \log(E/M_U c^2),$$

où $j = 1, 2, 3$ labellise les groupes de jauge $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$, α_U est l'intensité « nue » commune aux trois interactions, et b_j sont les coefficients d'écrantage. Ces derniers se calculent en fonction du contenu en particules légères de la théorie, après brisure de la grande symétrie de jauge. L'élimination des deux paramètres inconnus, α_U et M_U , conduit donc à une relation entre α_1 , α_2 et α_3 à basse énergie. Les valeurs mesurées des intensités vérifient cette relation dans l'hypothèse où les particules légères correspondent à l'extension minimale supersymétrique du Modèle Standard (voir l'encadré).

La Grande Unification est un ingrédient générique de la théorie des cordes. Cette dernière va encore plus loin puisqu'elle incorpore dans le même schéma l'interaction gravitationnelle. Peut-on alors aussi exprimer l'intensité de la gravité, c'est-à-dire la constante G de Newton, en termes des paramètres α_U et M_U ? Pas toujours, car si les interactions des cordes ont, comme on l'a vu, une origine commune, l'intensité des interactions *effectives* à quatre dimensions peut dépendre des détails de la compactification. Plus la variété compacte est grande, par exemple, moins fréquents seront les croisements des cordes, et plus leurs interactions effectives paraîtront faibles. C'est le mécanisme responsable de la faiblesse de la gravitation dans les modèles branaires avec de grandes dimensions. Dans les modèles hétérotiques, par contre, ou plus généralement en l'absence de grandes dimensions supplémentaires, cet effet de volume est aussi absent, et on trouve

$$-\log G \simeq \log(16\alpha_U^{-1} M_U^2).$$



Encadré 2

Unification des forces

Les trois constantes de couplage du Modèle Standard sont habituellement exprimées à partir de celles des interactions fortes et électromagnétiques, et de l'angle de Weinberg :

$$\alpha_1 \equiv \frac{5}{3} \frac{\alpha_{em}}{\cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_2 \equiv \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W} \quad \text{et} \quad \alpha_3.$$

Les valeurs expérimentales à l'énergie $\simeq 100 \text{ GeV}$ sont

$$\alpha_{em}^{-1} = 127,901, \quad \sin^2 \theta_W = 0,2312, \quad \text{et} \quad \alpha_3 = 0,119.$$

Ces valeurs prennent en compte l'effet de polarisation du vide par les paires virtuelles de particules légères. Elles sont en accord avec l'hypothèse d'unification supersymétrique à $E_U \simeq 3 \times 10^{16} \text{ GeV}$, où on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \simeq 0,04$. L'accord est essentiellement limité par les incertitudes théoriques.

L'intensité de la force gravitationnelle croît de façon quadratique avec l'énergie. En comparant les lois de Newton et de Coulomb, on trouve que les deux forces ont une intensité

1. La valeur bien connue de la constante de structure fine $\alpha \simeq 1/137$, correspond à $E =$ masse de l'électron. En dessous de cette échelle, α n'évolue plus avec l'énergie.

Cette « postdiction » est en accord avec la valeur expérimentale $G = 6,7 \times 10^{-39} (c^2 / \text{GeV})^2$, à quelques pourcent près (sur une échelle logarithmique, voir l'encadré). C'est un signe indirect mais encourageant en faveur de l'unification des quatre forces dans le cadre d'une théorie supersymétrique de cordes.

D'où peut-on alors attendre une confirmation plus substantielle et plus directe ? Tout d'abord du LHC, le grand collisionneur au CERN de Genève, qui est déjà en opération à une échelle d'énergie où on attend des modifications drastiques du Modèle Standard. La découverte, notamment, de la supersymétrie serait un pas essentiel, car cette symétrie est solidement ancrée dans la théorie des cordes, et aussi parce que sur le plan théorique le mécanisme de sa brisure reste mystérieux. Mais d'autres découvertes sont aussi possibles: la désintégration du proton, dont le temps de vie estimé est proche de la limite expérimentale actuelle, $\tau \geq 5 \times 10^{33}$ années. Ou encore l'existence d'une cinquième force véhiculée par les champs de modules, qui correspondent aux ondes de déformation de la variété Y_G . L'estimation de la portée maximale (r_m) d'une telle force est proche de la limite expérimentale actuelle, $r_m \leq 100 \mu\text{m}$ si l'intensité est la même que celle de la force de gravité. Une coïncidence remarquable est que cette échelle correspond aussi à la valeur mesurée de l'énergie noire $E_{\text{noire}} / V \sim \hbar c / \text{mm}^4$. Elle constitue donc la limite de « naturalité » de toute théorie quantique de la gravité, dans le même sens que le TeV est la limite de naturalité du Modèle Standard.

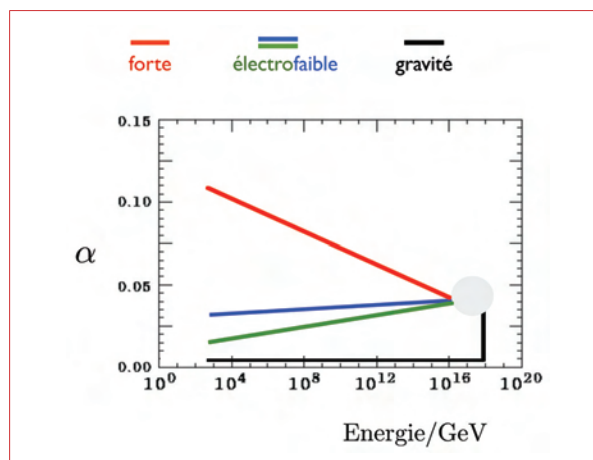


Figure E1 – Unification des quatre forces fondamentales.

égale à $\tilde{E}_U \simeq 10^{18} \text{ GeV}$. Sur l'échelle logarithmique, la différence entre E_U et \tilde{E}_U est de quelques pourcent. Un argument plus précis dans le cadre de la théorie hétérotique réduit \tilde{E}_U par un facteur approximatif de 2. Rappelons qu'en dehors d'une théorie unifiée de la gravité quantique, G et M_U ne doivent avoir aucune relation.

Pour conclure, il est frappant que la recherche d'une théorie quantique de la gravité conduise à cette multitude de nouveaux phénomènes, même si l'état actuel de son développement mathématique (ou peut-être une impossibilité inhérente ?) empêche le calcul précis des grandeurs en question. Ces avancées théoriques nous aideront-elles à comprendre les résultats expérimentaux et observationnels attendus dans les années à venir en physique des particules et en cosmologie ? L'avenir le dira.

POUR EN SAVOIR PLUS

- C. Bachas, « String Theory for Pedestrians », CERN Academic Training Program (http://videolectures.net/cernacademictraining09_geneve) (2009).
- J. Iliopoulos, « Le Modèle Standard : une théorie géométrique des interactions fondamentales », *Images de la Physique* 2005, **64** (2005).
- J. Maldacena, « The Illusion of Gravity », *Scientific American*, November, **56** (2005).
- B. Zwiebach, « A First Course in String Theory », Cambridge University Press (2003).

Je remercie Jan Troost et Pierre Vanhove pour leurs commentaires, et Pascale Bachas pour une lecture attentive de cet article.