ESTIMATIONS D'INCOMPRESSIBILITÉ POUR LA PHASE DE LAUGHLIN

NICOLAS ROUGERIE

L'effet Hall est connu depuis le 19ème siècle : si un courant électrique traverse un échantillon bi-dimensionel plongé dans un champ magnétique perpendiculaire, une tension perpendiculaire au courant et au champ magnétique se développe. La découverte plus récente des effets Hall quantiques (entier, puis fractionnaire) dans des gaz d'électrons bi-dimensionels, a donné lieu à deux prix Nobel de physique (von Klitzing en 1985, Laughlin, Störmer et Tsui en 1998). La conductivité associée à la tension perpendiculaire est en fait quantifiée en certaines fractions de e^2/h, de manière si précise qu'on s'en sert maintenant pour définir le standard de conductivité *(rappelons que e est la charge de l'électron et $\hbar$ la constante de Planck).*

L'effet Hall quantique fractionnaire [8, 1] est la signature de l'organisation des électrons en une phase de matière nouvelle, un fluide quantique fortement corrélé. Robert Laughlin [2, 3] a proposé en 1983 de décrire l'état fondamental de ce système par les fonctions d'onde:

$$\Psi_{\mathrm{Lau}}(z_1,\ldots,z_N) = c_{\mathrm{Lau}} \prod_{1\leq i<j\leq N} (z_i - z_j)^\ell e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2}. \tag{1}$$

Ici ℓ est un entier impair et $z_1,\ldots,z_N$ les coordonnées de N électrons 2D, identifiées avec des nombres complexes. Plus généralement, toute fonction de la forme

$$\Psi(z_1,\ldots,z_N) = c_F \Psi_{\mathrm{Lau}}(z_1,\ldots,z_N) F(z_1,\ldots,z_N), \tag{2}$$

avec F holomorphe et symétrique par rapport à l'échange de ses variables est un bon candidat pour approcher l'état fondamental du système. La théorie de l'effet Hall fractionnaire est en grande partie basée sur l'idée que le système choisit des fonctions simples de la forme

$$\Psi(z_1,\ldots,z_N) = c_f \Psi_{\mathrm{Lau}}(z_1,\ldots,z_N) \prod_{j=1}^N f(z_j). \tag{3}$$

La comparaison avec les expériences est fort convaincante, mais la raison profonde pour cette sélection n'est pas évidente.

Nicolas Rougerie et Jakob Yngvason [6, 7] ont approché cette question en étudiant un problème variationnel d'un type nouveau: il s'agit de minimiser, parmi les fonctions de la forme (2), une fonctionnelle d'énergie très simple

$$\mathcal{E}[\Psi] = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2N}} V\left(N^{-1/2} z_j\right) |\Psi(z_1,\ldots,z_N)|^2 dz_1 \ldots dz_N \tag{4}$$

où $V : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est un potentiel électrique extérieur ressenti par les électrons, toujours présent en pratique à cause d'impuretés dans les échantillons. Ici on suppose que les

Date: Octobre, 2015.

effets dominants sont dûs au champ magnétique et aux interactions entre particules, ce qui impose la forme (2). On souhaite ensuite voir si une forme plus spécifique est favorisée par un potentiel extérieur.

La borne inférieure suivante a été démontrée récement [7]:

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{E(N)}{N} \geq E_V\,(\ell/4) \tag{5}$$

où $E(N)$ est l'infimum de la fonctionnelle (4) parmi les fonctions normalisées dans $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ de forme (2) et

$$E_V\,(\ell/4) := \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} V\rho \,\middle|\, \rho \in L^1(\mathbb{R}^2),\ 0 \leq \rho \leq \frac{4}{\pi\ell},\ \int_{\mathbb{R}^2} \rho = 1 \right\}. \tag{6}$$

On peut interpréter ce résultat comme une propriété d'incompressibilité: *lorsqu'on prend l'infimum dans (6), on suppose* que la densité de matière locale du système est partout bornée supérieurement par $4/(\pi\ell\sqrt{N})$ pour N grand. *Rappelons que pour notre système d'électrons, la densité de matière est donnée par* $\rho = |\psi(z_1, \cdots, z_N)|^2 dz_1 \cdots dz_N$*).* L'inégalité (5) est une version duale de cette interprétation: l'énergie optimale est toujours minorée par celle obtenue en imposant une borne supérieure à la densité, pour une large classe de potentiels extérieurs V.

Il est naturel de conjecturer qu'une borne optimale pour la densité de matière est $1/(\pi\ell\sqrt{N})$, ce qui correspondrait à obtenir $E_V\,(\ell)$ au membre de droite de (5). On sait en effet (par des résultats de Nicolas Rougerie, Sylvia Serfaty et Jakob Yngvason [5, 4]) construire dans certains cas des fonctions de la forme (3) donnant exactement l'énergie $E_V\,(\ell)$ à la limite $N \to \infty$. Une généralisation de ces constructions et une optimisation de la borne inférieure (5) permettraient de confirmer l'intuition de Laughlin: les minimiseurs peuvent toujours être cherchés sous la forme simplifiée (3), au moins quand N est grand.

Références

[1] S. Girvin, *Introduction to the fractional quantum Hall effect*, Séminaire Poincaré, 2 (2004), pp. 54–74.

[2] R. B. Laughlin, *Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*, Phys. Rev. Lett., 50 (1983), pp. 1395–1398.

[3] ——, *Elementary theory : the incompressible quantum fluid*, in The quantum Hall effect, R. E. Prange and S. E. Girvin, eds., Springer, Heidelberg, 1987.

[4] N. Rougerie, S. Serfaty, and J. Yngvason, *Quantum Hall phases and plasma analogy in rotating trapped bose gases*, J. Stat. Phys., (2013).

[5] ——, *Quantum Hall states of bosons in rotating anharmonic traps*, Phys. Rev. A, 87 (2013), p. 023618.

[6] N. Rougerie and J. Yngvason, *Incompressibility estimates for the Laughlin phase*, Comm. Math. Phys., 336 (2015), pp. 1109–1140.

[7] ——, *Incompressibility estimates for the Laughlin phase, part ii*, Comm. Math. Phys., (2015).

[8] H. Störmer, D. Tsui, and A. Gossard, *The fractional quantum Hall effect*, Rev. Mod. Phys., 71 (1999), pp. S298–S305.

Université Grenoble 1 & CNRS , LPMMC (UMR 5493), B.P. 166, F-38 042 Grenoble, France
E-mail address: nicolas.rougerie@grenoble.cnrs.fr